Bartha Gábor feladatjavaslatai az Arany Dániel Matematika Versenyre

Kérem, hogy a megoldásokat elektronikus (lehetőleg doc vagy docx) formában is küldjétek el a következő e-mail címre: balgaati@gmail.com

I. forduló:

1. Egy egyenlő szárú háromszög súlypontja rajta van a háromszög beírt körén. Mekkora a köré írt és a beírt kör sugarának aránya?

2. Igazoljuk, hogy egy derékszögű háromszögnek csak akkor van két egymásra merőleges súlyvonala, ha a súlyvonalakból, mint oldalakból derékszögű háromszög szerkeszthető.

3. Egy c átfogójú derékszögű háromszög beírt körének középpontja K, súlypontja S. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{25} < \frac{KS}{c} < \frac{1}{3}$$

4. Az AB átfogójú ABC derékszögű háromszög köré írt körét a C csúcsból induló magasságvonal az E, míg a C csúcsból húzott szögfelező a D pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AC > BC$ esetén a $BCDE$ négyszög és az ABC háromszög egyenlő területű! (*Megj.: Prolongálva lett a II.-III. fordulóra.)*

5. Mekkora a befogók aránya abban a derékszögű háromszögben, amelyben az egyik befogóhoz hozzáírt kör sugara kétszer akkor, mint a beírt kör sugara?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög oldalainak hossza adott egységben mérve egész szám, akkor a háromszög kerülete és területe nem lehet azonos számértékű!

7. Az AB alapú ABC egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja F_1, súlypontja S, magasságpontja M, beírt köre k. Ha $FM = \sqrt{6}$ és S illeszkedik k-ra, akkor mekkora az ABC háromszög kerülete?

8. Egy trapéz átlói merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy ha a trapézba az oldalakat érintő kör írható, akkor a trapéz rombusz!

9. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának egyik belső pontja P. Az AC szár C csúcshoz közelebbi harmadolópontja H. Az A csúcs HP egyenesre vonatkozó tükörképe a BC oldal B csúcshoz közelebbi negyedelőpontja. Határozzuk meg az $AP:PB$ arányt!

10. Egy négyzet két szomszédos oldalának felezőpontja P és Q. A PQ egyenes a négyzet köré írt kört az R és S pontokban metszi. Határozzuk meg $\left(\frac{RS}{PQ}\right)^2$ értékét!

11. A nullától különböző a és b valós számokra $a^2 + b^2 = 1$ teljesül. Határozzuk meg az alábbi szorzat minimumát:

$$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{b^2}\right)$$

12. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor

$$2 \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} < \frac{1}{\sqrt{x^2} - x} < 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}$$

13. Mi az alábbi kifejezés legkisebb értéke, ha $x < -1$:

$$\left| x^{-1} - \frac{\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1} \right|$$

14. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left(\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^x+\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^x=4$$

15. Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett f függvény legkisebb és legnagyobb értékét, ha

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}$$

16. A minden valós számra értelmezett $f(x)$ függvényre $f(x+1)+3f(-x)=|x|$ teljesül. Adjuk meg $f(x)$ zérushelyeit!

17. Hány olyan $(x;y)$ számpár van, amelyre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2005}$$

18. Hány olyan pozitív egészekből álló $(x;y;z;u)$ számnégyes van, amelyre igaz az alábbi egyenlőség:

$$2^x+2^y+2^z+2^u=2^{2005}$$

19. Igazoljuk, hogy 2006 darab páratlan szám négyzetének összege nem írható fel sem két négyzetszám összegeként, sem pedig két négyzetszám különbségeként!

20. Az $\{1\,;2\,;3\,;\dots;100\}$ halmaznak hány olyan háromelemű részhalmaza van, amelyben a számok összege 100?

21. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x;y)$ számpár van, amelyre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2009}$$

22. Az a és b pozitív egész számokra teljesül, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}}=b$$

Mi lehet az a szám utolsó számjegye?

23. Bizonyítsuk be, hogy 9 darab egymást követő egész szám négyzetének összege

a) nem lehet prímszám;

b) nem lehet négyzetszám!

24. Határozzuk meg azokat az egész számokból álló $(x\,;y)$ számpárokat, amelyekre teljesül, hogy:

$$|y|=\sqrt{x^2+x-2}$$

25. Az $\{1\,;2\,;3\,;\dots;2009\}$ számhalmazból 10 darab számot választunk ki egyesével a következő módon. Az első két szám az adott halmaz valamelyik két eleme. A harmadik kiválasztott szám az első kettő összege, ami éppen négyzetszám. Minden további kiválasztott szám az addig már kiválasztott számok összege. Hány négyzetszám lehet a kiválasztott 10 darab szám között?

26. Tekintsük azokat a a négyjegyű pozitív egész számokat, amelyek számjegyeinek összege 4. Hány százalék az esélye annak, hogy ezek közül a számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva páros számot kapunk?

II. forduló:

27. Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara r. A beírt körhöz az oldalakkal párhuzamos érintőket húzunk. Az érintők által az eredeti háromszögből levágott három új háromszög beírt körének sugara r_a, r_b, r_c.
Bizonyítsuk be, hogy $r_a + r_b - r_c \geq r \cdot \left(4\sqrt{2} - 5\right)$.

28. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának tetszőleges P pontjából merőlegest állítunk AP-re. A merőleges az AB átfogót E-ben metszi. Az E pont BC-re eső merőleges vetülete Q. Igazoljuk, hogy CQ akkor minimális, ha a P pont rajta van az A csúcsból induló szögfelezőn.

29. A t területű, m magasságú húrtrapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M, a trapéz körülírt körének középpontja O. A BC oldal felezőpontja E, az AD oldalé pedig F. Bizonyítsuk be, hogy ha $t = m^2$, akkor az $OEMF$ négyszög rombusz.

30. Az AB szakasz A csúcshoz közelebbi harmadolópontja H. Az AHC és HBD szabályos háromszögek az AB egyenes ugyanazon oldalán helyezkednek el. AD és HC metszéspontja P, BC és HD metszéspontja Q, AD és BC metszéspontja M.
a) Határozza meg a $PQ : AB$ arán értékét.
b) Bizonyítsuk be, hogy az M, P, H, Q pontok egy körön vannak.

31. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög súlyvonalaiból, mint oldalakból derékszögű háromszög szerkeszthető, akkor ez a háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz.

32. Két r sugarú kör kívülről érinti egymást. Egy újabb r sugarú k_1 kör mindkét kört kívülről érinti az A és B pontokban. Egy másik r sugarú k_2 kör is érinti az eredeti két kört a C és D pontokban. Az $ABCD$ konvex négyszög kerülete 4 egység. Írjunk fel olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, amelynek egyik gyöke r.

33. Rajzoljuk meg azokat a köröket, amelyek átmennek egy tetszőleges háromszög egy csúcsán és s csúcsból induló oldalak csúcshoz közelebbi harmadoló pontjain. Bizonyítsuk be, hogy van olyan kör, amelynek sugara a megrajzolt körök sugarainak számtani közepe, és mindhárom kört érinti.

34. Bizonyítsuk be, hogy ha egy téglalap átlói átlói által bezárt kisebbik szög 30°, akkor a téglalap belső szögfelezői által közrefogott négyszög területe megegyezik a téglalap területével.

35. Az AB alapú ABC egyenlő szárú háromszög A csúcsból induló súlyvonalát harmadolja a B csúcsból induló magasság.
a) Mekkora szögben látszik a háromszög S súlypontjából az AB alap?
b) Milyen arányban osztja az adott magasság a háromszög területét?

36. Bizonyítsuk be, hogy ha egy téglalap kerületének négyzete a területének 25-szöröse, akkor az átlók által bezárt kisebb szög 30°-nál kisebb.

37. Egy téglalapot az egyik csúcsából húzott két egyenes három egyenlő területű részre oszt. Mekkora téglalap oldalainak aránya, ha a három rész közül kettőnek egyenlő a kerülete?

38. Az $ABCD$ téglalap átlói AC és BD. Bizonyítsuk be, hogy a téglalap tetszőleges P belső pontjára teljesül, hogy

$$PA^2 - PB^2 = PD^2 - PC^2$$

39. Az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzetbe írt $PQRS$ paralelogramma P, Q, R, S csúcsa rendre az AB, BC, CD, DA oldal egy-egy belső pontja. Mekkora lehet AP értéke, ha a paralelogramma területe $\frac{2}{3}$-része az $ABCD$ négyzet területének?

40. Az $ABCD$ egyenlő szárú háromszög AB alapjának egyik belső pontja P. Az AC szár C-hez közelebbi harmadolópontja H. Az A csúcs HP egyenesre vonatkozó tükörképe a BC oldal B-hez közelebbi negyedelőpontja. Határozzuk meg az $AP:PB$ arányt!

41. Egy paralelogramma oldalai 3 cm és 4 cm hosszúak. A két átló összege centiméterben mérve egész szám. Mekkora lehet az átlók különbségének abszolút értéke.

42. Ha a $\sqrt{3}$ egység átfogójú derékszögű háromszögre igaz, hogy a háromszög súlypontja a beírt körön van rajta, akkor mekkora a háromszög kerülete?

43. Egy derékszögű háromszög egyik oldalával párhuzamos egyenes felezi a háromszög kerületét és területét is. Mekkora a háromszög legkisebb szöge?

44. Adott a síkon n darab pont ($n > 3$). A pontok közül bármely három lefedhető egy egységsugarú körlappal. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összes pont lefedhető egy két egység sugarú körlappal.

45. Adott a síkon n darab pont ($n > 3$). A pontok közül bármely három lefedhető egy egységnyi területű háromszöggel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összes pont lefedhető egy négy egység területű háromszöggel.

46. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:
$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^4}+\frac{1}{\left(1-\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^4}+\frac{2}{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3}+\frac{2}{\left(1-\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3}=0$$

47. Igazoljuk, hogy ha az x, y valós számokra teljesülnek az $x+y+z=a$ és az $xy+yz+zx=\frac{a^2}{4}$ egyenlőségek, ahol $a>0$, akkor x, y, z mindegyike nemnegatív és nem nagyobb $\frac{2}{3}a$-nál.

48. Az $f(x)=px-x^2$ másodfokú függvény ($p>0$) grafikonja és az x tengely által közrefogott síkidomba téglalapokat írunk úgy, hogy a téglalapok két csúcsa az x tengelyen, kettő pedig az $f(x)$ függvény grafikonján legyen rajta.

a) Milyen pozitív p paraméter esetén írható maximális kerületű téglalap a síkidomba?

b) Maximális kerületű téglalap esetén milyen távol van a parabola csúcsa a hozzá legközelebbi téglalapcsúcstól?

49. Határozzuk meg az alábbi függvény maximumát és minimumát:
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \ f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3x+4}$$

50. Határozzuk meg a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett $f(x)=2\sqrt{x}+\sqrt{9-2x}$ függvény értékkészletét

51. Határozzuk meg a $p\in\mathbb{Z}^+$ lehetséges értékeit úgy, hogy az alábbi függvény értékkészlete pontosan 10 darab egész számot tartalmazzon
$$f(x)=\sqrt{x^2+p}-\sqrt{x^2+1}$$

52. Legyen x tetszőleges pozitív egész szám és jelölje $f(x)$ az x számnak és az x szám számjegyei összegének különbségét, ahol $f(x)=0$, ha az x szám egyjegyű. Oldjuk meg az $f\left[f\left(f(x)\right)\right]=9$ egyenletet.

53. Az $\{a_n\}$ számsorozatot a következő módon definiáljuk:
$a_1 = a$, ahol „a" pozitív egész szám, $n \geq 1$ esetén pedig

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, \text{ha } a_n \text{ páros szám} \\ 2a_n + 2, \text{ha } a_n \text{ páratlan szám} \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $a = 2^{2006} + 2006$, akkor a sorozatnak tagja az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike.

54. Tekintsük azokat a legalább kétjegyű tízes számrendszerbeli számokat, amelyeknek első számjegye 1, a többi pedig mind egyforma, de nem 0. Hány négyzetszám van ezek között a számok között?

55. Az a, b, c páronként különböző pozitív egész számokra teljesülaz alábbi összefüggés:

$$\frac{a^3 + b^3}{b^3 + c^3} = \frac{a + b}{b + c}$$

Igazoljuk, hogy ekkor az $ax + cy = b^{2005}$ mindig van pozitív egész számokból álló $(x\,; y)$ megoldása.

56. Adott 17 darab természetes szám, amelyek prímosztói a p_1, p_2, p_3, p_4 prímszámok közül kerülnek ki. Bizonyítsuk be, hogy a 17 szám közül kiválasztható két olyan, amelyek szorzata négyzetszám.

57. Bizonyítsuk be, hogy 2006 darab páratlan egész szám négyzetének összege nem állítható elő két négyzetszám összegeként és két négyzetszám különbségeként sem.

58. Melyek azok a pozitív egész számok, amelyek 2012-zel nagyobbak számjegyeik négyzetösszegénél?

59. 49 darab pozitív egész szám szorzata egyenlő a számok összegével. Igazoljuk, hogy van a számok között prímszám.

60. Két párhuzamos egyenes mindegyikén prímszám számú pontot jelöltünk meg. A megjelölt pontok – mint csúcsok – által meghatározott összes négyszög száma kétszerese a megjelölt pontok által meghatározott háromszögek számának. Hány pontot jelöltünk meg az egyeneseken?

61. Három játékos olyan játékot játszik, amelyek végén az egyik játékos két zsetont nyer, a másik kettő pedig egy-egy zsetont veszít. A játékosok egyenlő számú zsetonnal kezdték a játékot. Néhány játszma után az egyik játékosnak ugyanannyi zsetonja volt, mint a másik két játékos zsetonjai összegének fele. Igazoljuk, hogy ekkor a lejátszott játszmák szám nem lehetett 2006.

62. Egy kocka csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat (mindegyik csúcs ugyanakkor valószínűséggel választható). Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott három csúcs derékszögű háromszöget határoz meg?

63. Néhány település közül bármelyik kettő pontosan egy közvetlen útszakasszal van összekötve. Tudjuk, hogy ha az útszakaszok közül bármelyik 18 tönkremegy, még akkor is el lehet jutni a maradék úthálózaton bármely településről bármely másikra. Mennyi lehet a települések száma?

64. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egyszer játszik. Ha a résztvevők csak feleannyian lennének, akkor az eredetileg lejátszott játszmák 24%-ára kerülne csak sor. Hány versenyző indult a versenyen?

65. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egyszer játszik. Ha 2-vel kevesebb versenyző lenne, akkor a lejátszandó partik száma négyzetszámmal csökkenne. Bizonyítsuk be, hogy ha eredtileg n versenyző volt ($n \geq 4$), akkor n nem lehet négyzetszám.

III. forduló:

66. Egy derékszögű háromszög oldalait és csúcsait a szokott módon jelölve $a < b < c$. A háromszögnek a C csúcsból induló súlyvonal egyenesére vonatkozó tükörképe $A'B'C'$ Az ABC és az $A'B'C'$ háromszöglap közös részének területe az ABC háromszög területének fele. Mekkora ebben az esetben az alábbi hányados pontos értéke:

$$\frac{2b^2 - c^2}{a^2}$$

67. Egy hegyesszögű háromszögbe három négyzetet írunk úgy, hogy a négyzet mindegyik csúcsa a háromszög kerületén legyen. Bizonyítsuk be, hogy a három négyzet területének összege kisebb a háromszög területének másfélszeresénél.

68. Egy háromszög egyik oldala a másik két oldal mértani közepe. A háromszög súlypontja az oldalaktól rendre p, q, r távolságra van. Bizonyítsuk be, hogy ha $p^2 + q^2 = r^2$, akkor a háromszög derékszögű.

69. Tekintsük a szabályos n-szög csúcsi által meghatározott összes háromszöget. Mekkora lehet n értéke, ha a háromszögek között ugyanannyi hegyesszögű van, mint tompaszögű? *(Prolongálva a döntőre.)*

70. Egy húrnégyszög oldalfelező pontjai négyzetet határoznak meg. A négyzet oldal x, a húrnégyszög köré írt kör sugara y.

a) Mekkora $\frac{y}{x}$ minimális értéke?

b) Bizonyítsuk be, hogy $\frac{y}{x} < \sqrt{2}$

71. Egy adott AB szakasz két belső pontja X és Y, ahol $AX < AY$. Rajzoljunk az AX szakaszra AX oldalú négyzetet, az XY szakaszra olyan téglalapot, amelynek egyik oldal XY, másik oldala $0{,}5 \cdot XY$ hosszú, az YB szakaszra pedig YB alapú, $2 \cdot YB$ magasságú téglalapot! Mekkora az AX, XY, YB szakaszok aránya, ha a három megrajzolt síkidom területének összege minimális?

72. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c oldalú háromszögre $a^4 + b^4 = c^4$ teljesül, akkor a háromszög legnagyobb szöge 72°-nál nagyobb hegyesszög.

73. Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle = \gamma = 2 \cdot BAC\sphericalangle = 2\alpha$. A C csúcsból induló belső szögfelező az AB oldalt a D pontban metszi. A D pontból a BC egyenesre állított merőleges talppontja P, az AC egyenesre húzott merőleges talppontja pedig Q. A PQ egyenes az AB egyenest az M pontban metszi. A háromszög oldalait a szokott módon jelölve a háromszög K kerülete: $K = a + b + c = AM$, ahol $a < b < c$. Határozzuk meg az a, b, c oldalak arányát!

74. Az $ABCD$ négyzet köré írt körének a csúcsoktól különböző tetszőleges pontja P. Bizonyítsuk be, hogy a PAB, PBC, PCD, PDA háromszögek magasságpontjai egy körön vannak.

75. Az AB átmérőjű R sugarú kört belülről érinti egy r sugarú k kör az A pontban $(R > r)$. Az R sugarú kör BC húrja az E pontban érinti a k kört. Tudjuk, hogy BE és CE szakaszok mértani közepe megegyezik a sugarak mértani közepével. Mekkora az $r : R$ arány értéke?

76. Rajzoljuk meg azokat a köröket, amelyek átmennek egy tetszőleges háromszög egy csúcsán és s csúcsból kiinduló oldalak csúcshoz közelebbi harmadolópontjain. Bizonyítsuk be, hogy van olyan kör, amelynek sugara a három kör sugarának számtani közepe és mindhárom kört érinti.

77. Az AB átfogójú ABC derékszögű háromszög AB oldalának felező merőlegese a C csúcsból induló belső szögfelezőt a P pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$PA^2 + PB^2 > PC^2$;

$$PC = \frac{AC + BC}{\sqrt{2}}$$

78. Egy derékszögű háromszög egyik oldalához hozzáírt körének sugara megegyezik a háromszög valamely oldalának hosszával. Bizonyítsuk be, hogy az egyik oldal a másik két oldal mértani közepe.

79. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű trapéz átlói merőlegesek egymásra, akkor a trapéz területe nem lehet nagyobb az oldalak összegének számtani közepénél.

80. Az $ABCD$ derékszögű trapéz alapjai $AB = a$, $CD = c$ hosszúak, a derékszögű szár $AD = d$, a másik szár $BC = b$ hosszú. A trapéz átlói merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c oldalakból – mint szakaszokból – olyan háromszög szerkeszthető, melynek egyik szöge 60°.

81. Egy háromszög beírt körének a háromszög oldalaival párhuzamos érintői három háromszögre és egy hatszögre bontják az eredeti háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ha a három háromszög beírt köreinek sugarai 1: 2: 3 arányúak, akkor a háromszög derékszögű.

82. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög belsejében elhelyezhető egy 1 egység sugarú körlap, akkor a háromszögnek van olyan magassága, amely legalább 3 egység hosszú.

83. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja R. Az AB oldal Q és a CA oldal P belső pontjára teljesül, hogy az $AQRP$ négyszög területe fele az ABC háromszög területének. A PQ szakasz K belső pontjára igaz, hogy $\frac{KQ}{QP} = \frac{CR}{CB}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a K pont rajta van az ABC háromszög egyik középvonalán.

84. Az ABC háromszög CF súlyvonalának C-hez közelebbi harmadolópontja P. A P ponton átmenő e egyenes az AC oldalt a G, a BC oldalt az E belső pontban úgy metszi, hogy a GPC háromszög területe 5 cm², a PEC háromszög területe pedig 4 cm². Mekkora az ABC háromszög területe?

85. Az ABC háromszögre teljesül, hogy a C csúcsból húzott magasság T talppontja az AB oldal belső pontja, és $CT = AB$. Az AB oldallal párhuzamos egyenes AC-t P-ben, BC-t Q-ban metszi úgy, hogy a $TQPC$ négyszög húrnégyszög. Bizonyítsuk be, hogy a húrnégyszög területe legalább $\frac{4}{5}$-része az ABC háromszög területének.

86. Az ABC hegyesszögű háromszög A és C csúcsából induló magasságainak talppontja G, illetve E. Ha $AC = 13$ cm és $GE = 5$ cm, akkor mekkora az ABC háromszög köré írt kör sugara?

87. Milyen távol vannak a derékszögű koordináta-rendszer origójától a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 4x$ és a $g(x) = 2 + \sqrt{x+4}$. függvények grafikonjainak metszéspontjai?

88. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{8}{\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2}} \leq 6 - \sqrt{x+1}$$

89. Az x, y, z valós számokra igaz, hogy $x^z + y^z = 1$, ahol $z \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$x^{z+1} + y^{z+1} \geq \frac{1}{2}$$

90. Az $A = ax - y^2$, $B = by - z^2$, $C = cz. -x^2$ kifejezésekben a, b, c, x, y, z olyan valós számok, ahol $a^2 + b^2 + c^2 = 80$. Bizonyítsuk be, hogy A, B, C legkisebbike legfeljebb 5 lehet.

91. Adja meg az alábbi függvény minimumhelyét:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; f(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2 - 8x + 17}$$

92. Az x, y, z valós számokra $x + y + z = 9$ és $x^2 + y^2 + z^2 = 33$. Melyek azok az (x, y, z) számhármasok, amelyekre az $y \cdot z$ szorzat értéke a lehető legnagyobb, illetve legkisebb

93. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyeknek oldalai $n-1$, n, $n+1$, ahol n 2-nél nagyobb egész szám. Ha t_n jelöli a háromszög területét, akkor bizonyítsuk be, hogy a $\{t_n\}$ sorozat bármely tagjának végtelen sok egész számú többszöröse is tagja a sorozatnak.

94. Egy n oldalú sokszög oldalai adott egységben mérve egész számok. A sokszög oldalai $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, kerülete pedig k. Legyen $x_i = \frac{k}{a_i}$ $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$, ahol mindegyik x_i egész szám.

Bizonyítsuk be, hogy ha

a) $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{2}(n^2 + 5n)$

b) $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{2}(n^2 + 6n)$

akkor a sokszögnek van két egyenlő hosszúságú oldala.

95. Milyen n természetes számra igaz, hogy az alábbi összeg értéke négyzetszám:

$$4^{2005} + 4^{2006} + 4^n$$

96. Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi oldalú négyzet belsejében végtelen sok olyan P pont van, amelyekre igaz, hogy a $\frac{PB}{PA}, \frac{PC}{PA}, \frac{PD}{PA}$ arányok mindegyike racionális szám.

97. Bizonyítsuk be, hogy az $1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \cdots + 2006^{2007}$ szám

a) nem négyzetszám;

b) nem prímszám.

98. Hányféleképpen állítható elő 2007 1-nél több egymást követő pozitív egész szám ugyanolyan pozitív egész kitevőjű hatványainak összegeként?

99. Egy paralelogramma két oldal $2n$ és n^2 hosszú, ahol n pozitív egész szám. Az átlók összege is egész szám. Azt, hogy hányféle lehet az átlók hosszának összege $f(n)$-nel jelöljük, tetszőleges n pozitív egész szám esetén. Adja meg az $n \mapsto f(n)$ függvényt!

100. Az $\{1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 20\}$ halmazból úgy választunk ki maximális számú elemet, hogy a kiválasztott számok közül bármely kettő szorzata más számjegyre végződjön, mint a többi szorzat. Hányféle választás lehetséges?

101. Állítsuk elő tetszőleges n pozitív egész szám esetén a $36n^2 + 12n + 25$ összeget minimális számú páratlan négyzetszám összegeként.

102. Két pozitív szám összege megegyezik a szorzatukkal. Mindkét szám olyan véges tizedestört, amely a tizedesvessző után két számjegyet tartalmaz úgy, hogy az utolsó számjegy nullától különböző. Melyik ez a két szám?

103. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x ; y)$ számpár van, amelyek kielégítik az alábbi egyenletet:

a) $x^2 - y^2 = 2012^{2011}$

b) $x^2 + y^2 = 2012^{2011}$

104. Egy négyszög mindegyik oldalának hossza pozitív egész szám. Bármelyik oldal hossza osztója a másik három oldalhossz összegének. Mekkora lehet a négyszög legrövidebb és leghosszabb oldalhosszának aránya?

105. Egy pénzérmét egymás után n-szer feldobnak $(n > 2)$, majd lejegyzik a dobássorozat eredményét. Előtte azonban Péter és Pál fogad. Péter nyer, ha az n dobásból prímszámú fejdobás lett, különben Pál nyer. Melyik az a legkisebb n érték, amelyre Pálnak van nagyobb nyerési esélye?

106. Adott egy kör kerületén 2010 darab pont. Bármely két pontot összekötő szakaszt ki kell színezni úgy, hogy a közös végpontok nélküli szakaszok színe nem lehet azonos. Bizonyítsuk be, hogy a felhasznált színek száma minimum 2008.

107. Adottak az $\{1\}, \{1; 2\}, \{1 ; 2 ; 3\}, \dots, \{1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n\}$ halmazok ($n \geq 2$). A halmazok mindegyikéből kiválasztunk egy elemet úgy, hogy az adott halmaz bármely elemét ugyanakkora valószínűséggel választjuk. P_k-val jelöljük annak valószínűségét, hogy a kiválasztott n darab elem maximuma éppen k.

a) Adjuk meg $n = 8$ esetén a $P_1, P_2, \dots, P_8$ valószínűségek maximumát.

b) Adjuk meg P_k értékét k és n függvényében.

108. Egy szabályos pénzérmét egymás után $2n$-szer feldobunk ($n \geq 1$). A lehetséges $2n$ hosszúságú dobássorozatok közül hány olyan van, amelyben legalább n darab „fej” értékű dobás közvetlenül szomszédos?